1. Considere el algoritmo de contracción de Karger (ver PDF “Análisis probabilístico y algoritmos aleatorizados”). Este algoritmo incrementa su probabilidad de fallar conforme se acerca a su finalización. Suponiendo que existen otros algoritmos determinísticos que resuelven el problema del corte mínimo, pero cuyas tasas de crecimiento son altas:

a. ¿Qué se puede hacer para encontrar un corte mínimo aprovechando la velocidad del algoritmo de Karger pero sin que la probabilidad de fallo supere una cantidad 𝑝 dada? Con base en su respuesta anterior:

b. ¿Cuál es la probabilidad de contraer un grafo hasta que tenga 𝑘 vértices sin contraer una arista perteneciente a un corte mínimo específico? Hint: apóyese en el cálculo de probabilidad hecho en clase para contraer a dos vértices.

A continuación, se presenta una versión recursiva del algoritmo de Karger, llamada algoritmo de Karger-Stein:

Text

Description automatically generated

c. En el else de este algoritmo recursivo se realiza una contracción del grafo original 𝐺 al nuevo grafo 𝐺′ que tiene ⌈ 𝑛 √2 + 1⌉ vértices. Demuestre que la probabilidad de que el corte mínimo “sobreviva” dicha contracción es de al menos 50% (es decir, demuestre que la probabilidad es mayor o igual a 1 2 ). Para evitar complicaciones con operaciones de piso y techo puede suponer que 𝑛 √2 es un número entero.

d. Explique cómo funciona este algoritmo al efectuar dos contracciones sobre el mismo grafo, a ⌈ 𝑛 √2 + 1⌉ vértices cada vez, y ejecutándose recursivamente sobre cada resultado. ¿Por qué es útil hacer dos contracciones a partir del mismo grafo y cómo se contrarresta la alta probabilidad de fallo del caso base? Hint: visualice el árbol de subgrafos que se producen a partir del original por la recursión. Recuerde la razón por la que el algoritmo de Karger tiene riesgo de fallar

e. Este algoritmo tiene éxito cuando un corte mínimo sobrevive a todas las contracciones, incluyendo a la del caso base (𝑛 ≤ 6).

i. Calcule una cota inferior (como desigualdad) para la probabilidad 𝑃(𝑛) de que esta contracción del caso base sea exitosa (que el corte mínimo sobreviva). La probabilidad del caso recursivo (i.e., del else) debe ser expresada, por su naturaleza, como una relación de recurrencia sobre 𝑃(𝑛). Además, obsérvese que, para que el caso recursivo sea exitoso, el corte mínimo debe sobrevivir tanto a la contracción inicial 𝐺 ′ ← Contract (𝐺,⌈ 𝑛 √2 + 1⌉) como a la ejecución recursiva. Considerando que la contracción inicial y la ejecución recursiva son eventos independientes:

ii. Calcule una cota inferior (una desigualdad, no una notación asintótica) para la probabilidad de éxito 𝑃(𝑛) de las instrucciones dentro del caso recursivo cuando son ejecutadas una única vez. Hint: recuerde usar la respuesta del inciso c. El caso recursivo ejecuta las mismas instrucciones dos veces. La única forma en la que el caso recursivo puede fallar es que ambos intentos fallen. Si ya calculamos una cota inferior para la probabilidad de éxito de un intento individual,

iii. ¿Cuál es la cota superior para la probabilidad de fallo de un intento individual? Sabiendo la cota superior para la probabilidad de fallo de un intento individual:

iv. ¿Cuál es la cota superior para la probabilidad de fallo de ambos intentos? Hint: observe que los intentos son independientes el uno del otro. Usando la cota para la probabilidad de fallo de ambos intentos:

v. Provea una cota inferior (desigualdad, no notación asintótica) para la probabilidad de éxito 𝑃(𝑛) del caso recursivo, en general. Use este resultado y el del caso base para proveer una cota inferior por casos (i.e., 𝑛 > 6 y 𝑛 ≤ 6) para la probabilidad de éxito de todo el algoritmo.

Esta variación al algoritmo original de Karger tiene una probabilidad de éxito para encontrar un corte mínimo específico de Ω( 1 log2 𝑛 ), cuando se resuelve la recurrencia resultante (no requerido para este ejercicio)